极小子流形高斯映照值分布问题

杨翎

哈尔滨工业大学

2019年5月3日

目录

Minimal Graphs

- Lagrange (1762)
  设D是$\mathbb{R}^2$中的有界开区域, $f : D \to \mathbb{R}$是光滑函数, 记$\Gamma(f) := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$为$f$的图像. 如果对于所有满足$\partial\Sigma = \partial\Gamma(f)$的带边曲面$\Sigma$, 有$\mathrm{Area}(\Gamma(f)) \le \mathrm{Area}(\Sigma)$, 则$f$必满足以下的极小曲面方程:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

  也可以把上述方程写成以下的散度形式:

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\right) = 0.$$

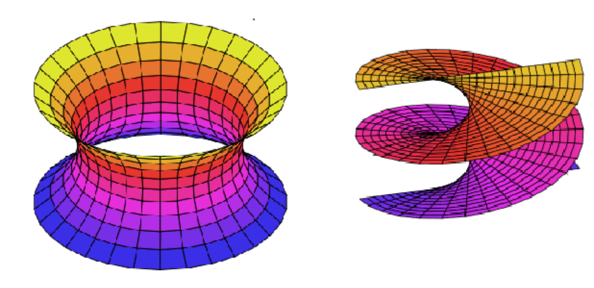
- Meusnier (1776)
  设$M = \Gamma(f)$, 则f满足极小曲面方程当且仅当M上的平均曲率函数H恒为0.

定义

设M^n是$\mathbb{R}^{n+m}$中的子流形，如果M上的平均曲率向量场恒为0，则称M为$\mathbb{R}^{n+m}$中的极小子流形.

例子:

- 仿射平面
- 悬链面和螺旋面



定理 (Bernstein(1915))

设f是$\mathbb{R}^2$上的光滑函数，$M = \Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^2\}$是$f$的图像，若$M$为极小曲面，则$M$必为仿射平面．简而言之，*3维Euclid*空间的所有完备极小图都是仿射平面．

用PDE的语言来说，极小曲面方程

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0$$

在$\mathbb{R}^2$上的整体解一定是仿射线性的．

High Dimensional Graphic Cases

定理 (Moser(1961, CPAM))

若$M = \Gamma(f)$是$\mathbb{R}^{n+1}$中的n维完备极小图，且斜率函数$\Delta_f := \sqrt{1+|\nabla f|^2}$一致有界，则$M$一定是仿射空间.

定理 (Simons(1968, Ann. Math.))

若$M = \Gamma(f)$是$\mathbb{R}^{n+1}$中的n维完备极小图，且$n \le 7$，则M一定是仿射空间.

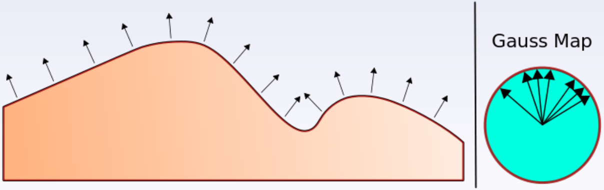
另一方面，Bombieri-De Giorigi-Giusti(1969, Invent. Math.)举反例说明，Bernstein定理不能推广到8维以上的情形.

定义

设M是$\mathbb{R}^{n+1}$中的可定向超曲面，则存在一个定义在整个M上的单位法向量场，记为ν. 这使得我们能定义一个光滑映照$\gamma : M \to S^n$

$$x \mapsto \nu(x).$$

γ称为$Gauss$映照.



命题

- M是仿射空间$\Longleftrightarrow$ M上的$Gauss$映照是常值映射.
- M是图$\Longrightarrow$ M的$Gauss$像落在S^n中的一个开半球内.
- $M=\Gamma(f)$, 并且斜率函数Δ_f一致有界$\Longrightarrow$ M的$Gauss$像落在开半球的一个闭子集内.
- M为$\mathbb{R}^3$中的极小曲面$\Longrightarrow$$Gauss$映照为全纯映照.
- M为$\mathbb{R}^{n+1}$中的极小超曲面$\Longrightarrow$$Gauss$映照为调和映照.

2-Dimensional Cases

猜想 (Nirenberg)

对$\mathbb{R}^3$中的任意完备非平坦极小曲面, 其*Gauss*像在S^2中稠密.

- Osserman (1959, CPAM)
  证明了Nirenberg猜想.
- Fujimoto (1988, J. Japan. Math. Soc.)
  对$\mathbb{R}^3$中的任意完备非平坦极小曲面, 其Gauss像在S^2中的余集至多为4个点.
- 上述工作建立在Weierstrass表示和半纯函数值分布理论的基础之上, 不能直接推广到高维情形.

Yau's Problem

- 1982年, 丘成桐在Seminar on Differential Geometry一书的Problem Section中引用了Nirenberg猜想的已有成果, 并提出以下问题:

  "*Can one generalize these assertions to three-dimensional minimal hypersurfaces?*"

- 1992年, 丘成桐在Open problem in geometry(Chern-the great geometer in 20's century. International Press, Hong Kong)的"problem 33"中提到:

  "*The work of Osserman-Xavier-Fujimoto has settled the question of the value of the values of the Gauss map for complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$. *There is basically no generalization to higher dimension except the beautiful work of Solomon for all minimizing hypersurfaces with zero first Betti number. Can one find a suitable generalization of Solomon's theorem by weakening the last two assumptions?*"

定理 (Jost-忻元龙-杨翎(2012,JDG))

设M是$\mathbb{R}^{n+1}$中的完备极小超曲面. 对$\forall x \in M$, 记$B_R(x) = \{y \in M : |x-y| < R\}$. 若$\exists C_1, C_2 > 0$, 使得

- $Vol(B_R(x)) \le C_1 R^n$
- $\int_{B_R(x)} |v-\bar{v}|^2 * 1 \le C_2 R^2 \int_{B_R(x)} |\nabla v|^2 * 1$

并且M的$Gauss$像在S^n中的余集包含$\overline{S}_+^{n-1}$的某个邻域, 则M一定是仿射平面.

由于"最小超曲面"满足Euclid增长条件和Neumann-Poincaré不等式, 我们得到:

推论 (Jost-忻元龙-杨翎(2012,JDG))

设M是$\mathbb{R}^{n+1}$中完备最小超曲面, 并且M的$Gauss$像在S^n中的余集包含$\overline{S}_+^{n-1}$的某个邻域, 则M一定是仿射平面.

Remarks

注

- S^n的某个区域内的任意严格凸函数与Gauss映照γ的复合为极小超曲面M上的强次调和函数，这是论文中分析工具，即*Hildebrandt-Jost-Widman*迭代适用的前提和基础.
- 设V是*Riemann*流形(M, g)上的开子集，若V的任意紧子集K上均存在凸函数f_K(f_K可能与K有关)，则称V为M的凸支集(*convex supporting set*，见[*Gordon, 1972, PAMS*]). $V := S^n \backslash \overline{S}^{n-1}_+$是$S^n$的极大凸支集，但不是唯一的极大凸支集.
- 通过S^n上广义经度函数的构造，我们可以借助*Harnack*不等式和*Ecker-Huisken*估计等分析工具得到极小超曲面的曲率估计，并改进上述*Bernstein*型定理(见[杨翎，*2015, Calc. Var. PDE*]).

设$f=(f^1,\cdots,f^m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$是光滑的向量值函数, $M=\Gamma(f):=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}^n\}$是$f$的图像. 则$M$为$\mathbb{R}^{n+m}$中的极小子流形当且仅当$f$满足以下的极小曲面方程组:

$$\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j}\right)=0\qquad \alpha=1,\cdots,m$$

其中$(g_{ij}):=(\delta_{ij}+\sum_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^j})$为$M$的度量矩阵, $(g^{ij}):=(g_{ij})^{-1}$并且$g:=\det(g_{ij})$. 我们记$\Delta_f:=\sqrt{g}$为f的斜率函数.

注

若$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$为全纯函数, 则$M=\Gamma(f)$为完备极小曲面. 因此, 经典的*Bernstein*定理不能直接推广到高余维情形.

命题

如果$M = \Gamma(f)$为斜率一致有界的完备极小图，则

- M的无穷远锥M_∞一定是非参数极小锥.
- M_∞与球面之交为球面的紧致极小子流形，每一点的法空间与一固定子空间的夹角均为锐角.
- M为仿射空间当且仅当M_∞平坦.

注

球面紧致极小子流形的外刚性定理$\Leftrightarrow$非参数化极小锥一定平坦$\Rightarrow$ 斜率一致有界的完备极小图一定是仿射空间.

定理 (陈省身-Osserman (1967, J. d'Anal. Math.))

设M是$\mathbb{R}^{2+m}$中的2维完备极小图，且斜率函数一致有界，则M一定是仿射平面.

定理 (Babosa (1980, JDG) Fischer-Colbrie (1980, Acta. Math.))

设M是$\mathbb{R}^{3+m}$中的3维完备极小图，且斜率函数一致有界，则M一定是仿射平面.

但Moser定理不能推广到$n=4$的情形.

Lawson-Osserman Cone

定理 (Lawson-Osserman(1977, Acta. Math.)

记$\eta : S^3 \to S^2$为*Hopf*映照，则

$$N_\eta := \left\{\left(\frac{2}{3}x, \frac{\sqrt{5}}{3}\eta(x)\right) : |x| = 1\right\}$$

为S^6中的极小子流形. N_η生成的锥C_η为$\mathbb{R}^7$中的*4*维非参数极小锥.

定理 (Ding-Yuan(2006, J. PDE))

存在$\mathbb{R}^7$中的*4*维完备极小图M_η，使得M_η的无穷远锥恰好为*Lawson-Osserman*锥C_η.

注

C_η的斜率函数恒为*9*, M_η的斜率函数取值在*1*和*9*之间.

Lawson-Osserman Problem

问题 (Lawson-Osserman(1977, Acta. Math.)

求出尽可能大的C_0, 若$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 满足极小曲面方程组, 且$\Delta_f\leq\beta_0<C_0$, 就可以推出f是仿射线性函数的结论.

- Hildebrandt-Jost-Widman(1980)
  证明$\Delta_f\leq\beta_0<\cos^{-p}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2p}}\right)$时结论成立, 其中$p=\min\{n,m\}$.
  $\left(\lim_{p\to\infty}\cos^{-p}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2p}}\right)=e^{\pi^2/16}\approx 1.85.\right)$
- Jost-忻元龙(1999)
  证明$\Delta_f\leq\beta_0<2$时结论成立.

Bernstein type theorem of higher codimension

定理 (忻元龙-杨翎(2008, Adv. Math.))

设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$为极小曲面方程组的光滑解，若$\Delta_f<2$，并且$n\le 4$或者$(2-\Delta_f)^{-1}=o(R^{\frac{4}{3}})$(其中$R^2=|x|^2+|f(x)|^2$)，则$f$一定是仿射线性函数.

定理 (Jost-忻元龙-杨翎(2013, Calc. Var. PDE))

设$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$为极小曲面方程组的光滑解，若$\Delta_f\le\beta_0<3$，则$f$一定是仿射线性函数.

定理 (Jost-忻元龙-杨翎(2015, TAMS))

设$M=\Gamma_f$为完备极小图，若$Gauss$映照$\gamma:M\to\mathbf{G}_{n,m}$的秩处处不超过$2$，并且$\Delta_f=o(R^{\frac{2}{3}})$(其中$R^2=|x|^2+|f(x)|^2$)，则$f$一定是仿射线性函数.

Generalized Gauss Maps

定义

设M是$\mathbb{R}^{n+m}$中的n维可定向子流形. 对任何一点$x \in M$, 有切空间T_xM, 由外围空间$\mathbb{R}^{n+m}$中的平行移动, 将T_xM平移到$\mathbb{R}^{n+m}$的原点, 得到$\mathbb{R}^{n+m}$的一个n维定向线性子空间, 从而得到*Grassmann*流形的一点$\gamma(x)$. 这就定义了*Gauss*映照$\gamma : M \to \mathbf{G}_{n,m}$.

命题

- M极小$\Longrightarrow \gamma$为调和映射.
- M极小, $\gamma(M) \subset V$, 且V上存在严格凸函数f $\Longrightarrow f \circ \gamma$为$M$上的强次调和函数.
- $\mathbf{G}_{n,m}$的极大凸测地球的半径为$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

The w-Function

定义

- 记$\psi : P \in \mathbf{G}_{n,m} \to e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \Lambda^n(\mathbb{R}^{n+m})$为*Plücker*嵌入，其中$\{e_1, \cdots, e_n\}$为与$P$定向相符的标准正交基.
- 固定$P_0 = span\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\} \in \mathbf{G}_{n,m}$，定义

$$w(P, P_0) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \varepsilon_1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n \rangle = \det\big(\langle e_i, \varepsilon_j \rangle\big).$$

- 称$\mathbb{U} := \{P \in \mathbf{G}_{n,m} : w(P, P_0) > 0\}$为$P_0$点的坐标邻域.

命题

设$M = \Gamma(f)$，$\gamma : M \to \mathbf{G}_{n,m}$，则$\gamma(M) \subset \mathbb{U}$并且$\Delta_f = v \circ \gamma$，其中$v := w(\cdot, P_0)^{-1}$.

Convex Functions

命题 (Jost-忻元龙(1999, Calc. Var. PDE))

记ρ为$\mathbf{G}_{n,m}$上到P_0的测地距离函数，则ρ^2在$\{P \in \mathbf{G}_{n,m} : v(P) < 2\}$为凸函数.

命题 (忻元龙-杨翎(2008, Adv. Math.))

v在$\{P \in \mathbf{G}_{n,m} : v(P) < 2\}$为凸函数.

命题 (Jost-忻元龙-杨翎(2013, Calc. Var. PDE))

v在$\{P \in \mathbf{G}_{n,m} : v(P) < 3\}$不一定是凸函数，但$v \circ \gamma$是极小子流形$M$上的次调和函数，其中$\gamma : M \to \mathbf{G}_{n,m}$为$Gauss$映照.

命题 (Jost-忻元龙-杨翎(2015, TAMS))

若$\gamma : M \to \mathbf{G}_{n,m}$的秩处处不超过$2$，且$\gamma(M) \subset \mathbb{U}$，则$v \circ \gamma$为极小子流形$M$上的次调和函数.

Parametric Cases

定理 (Jost-忻元龙-杨翎(2016, Annali SNS))

设$P_0, P_1 \in \mathbf{G}_{n,m}$, $\dim(P_0 \cap P_1) = n-1$并且$w(P_0, P_1) = 0$. 定义

$$\mathbb{W}_c := \{P \in \mathbf{G}_{n,m} : w(P, P_0)^2 + w(P, P_1)^2 < c^2,$$
$$\text{且} w(P, P_1) = 0 \Longrightarrow w(P, P_0) < 0\}.$$

设M是$\mathbb{R}^{n+m}$中满足体积*Euclid*增长条件和*Neumann-Poincaré*不等式的完备极小子流形, 且$\gamma(M) \subset\subset \mathbb{W}_{1/3}$, 则$M$必为仿射空间.

定理 (Jost-忻元龙-杨翎(2016, Annali SNS))

设M是$\mathbb{R}^{n+m}$中满足体积*Euclid*增长条件和*Neumann-Poincaré*不等式的完备极小子流形, $\gamma : M \to \mathbf{G}_{n,m}$的秩处处不超过2, 并且$\gamma(M) \subset\subset \mathbb{W}_0$, 则$M$必为仿射空间.

Lawson-Osserman Constructions

定理 (许小卫-杨翎-张永胜(2019, JMPA))

设$\pi : S^n \to P^p$为调和Riemmann淹没，$i : P^p \to S^m$为极小相似浸入，记$f = i \circ \pi$，则存在锐角θ，使得

$$M_\theta = \{(\cos\theta \cdot x, \sin\theta \cdot f(x)) : x \in S^n\}$$

是S^{n+m+1}的极小子流形．并且M_θ生成的锥C_θ是斜率为常数的非参数极小锥．

定理 (许小卫-杨翎-张永胜(2019, JMPA))

存在Euclid空间中斜率一致有界的完备极小图，使得它的无穷远锥恰好为C_θ．

定理 (马翔-王鹏-杨翎(2016, PJM))

设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2_1$为光滑映射，使得$M=\Gamma_f$为$\mathbb{R}^4_1$中的内空极值图. 则以下三种情形有且只有一种发生:

- f为仿射线性函数, $\Delta_f\equiv c\in(0,\infty)$;
- $f=h\mathbf{y}_0$, 其中h为调和函数, $\mathbf{y}_0$为常内光向量, $\Delta_f\equiv 1$;
- Δ_f的取值范围为$[r^{-1},r](r>1)$, 并且每个值都取到无穷多次.

定理 (马翔-王鹏-杨翎(2016, PJM))

设$M=\Gamma_f$为$\mathbb{R}^{2+m}_1$中的完备内空极值图. 若斜率函数严格小于1, 则M一定为仿射平面. 若斜率函数不超过1, 则M一定是平坦的.

定理 (丁琪-忻元龙-杨翎(2016, Adv. Math))

设M为$\mathbb{R}^{n+1}$中的完备超曲面，且浸入映射是逆紧的. 若M是平均曲率流自收缩子，并且M的$Gauss$像在S^n中的余集包含$\overline{S}^{n-1}_+$的某个邻域，则M一定是仿射平面.

注

自收缩子的例子$S^1\times\mathbb{R}^{n-1}$说明上述定理中$Gauss$像的条件已达到最优.

定理 (丁琪-忻元龙-杨翎(2016, Adv. Math))

设M为高余维完备图，斜率函数处处严格小于3，且为自收缩子. 则M一定是仿射平面.

Problems

Question

- 能否对所有高余维非参数极小锥进行分类?
- 常斜率函数极小图是否一定是常Jordan角子流形?
- 设M为Minkowski空间中的完备类空极值子流形，当M的Gauss像满足什么条件时，能够推出M为仿射空间的结论?
- 是否存在Euclid空间中高余维自收缩子M，使得M为斜率一致有界的完备图?
- 能否找到Grassmann流形中尽可能大的区域V，若带边极小图M的Gauss像落在V内，就能推出M为稳定极小子流形的结论?

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!

为祖国歌唱!!!